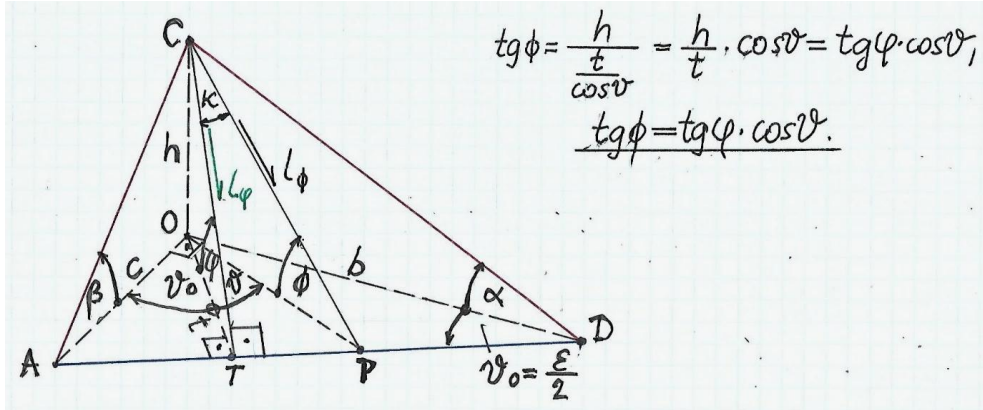


Egy feladat a tető szögeiről – 2. rész

Dolgozatunk – nem sorszámozott – 1. részében – ld.: *)! – egy egyenlő szárú háromszög alapú, azonos hajlású tetősíkokkal bíró tető néhány szögösszefüggését vizsgáltuk.

Itteni vizsgálódásunkhoz tekintsük az 1. ábrát, ahol az **OCD** szimmetriasíkkal bíró tető felét ábrázoltuk!



1. ábra

Eszerint:

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \vartheta \rightarrow \underline{\underline{\phi(\varphi, \vartheta) = \arctg(\operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \vartheta)}}, \quad (1)$$

ahol ϑ - t az **OT** egyenestől mérjük:

$$-\vartheta_0 \leq \vartheta \leq 90^\circ - \vartheta_0. \quad (2)$$

A $\vartheta = 0^\circ$ pozíció a $\phi = \varphi$ szögnek, vagyis a sík hajlásának felel meg. Továbbá:

$$\operatorname{tg} \phi(\vartheta = -\vartheta_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos(-\vartheta_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \vartheta_0 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{tg} \beta,$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \phi(\vartheta = -\vartheta_0) = \underline{\underline{\operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{tg} \beta}}. \quad (3)$$

Majd:

$$\operatorname{tg} \phi(\vartheta = 90^\circ - \vartheta_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos(90^\circ - \vartheta_0) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \vartheta_0 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{tg} \alpha,$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \phi(\vartheta = 90^\circ - \vartheta_0) = \underline{\underline{\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{tg} \alpha}}. \quad (4)$$

A (4) és (3) képletek megegyeznek az 1. részben talált egyszer aláhúzott (1) és (3) képletekkel.

Megjegyzések:

M1. Az (1) egyenlet így is átírható:

$$100 \cdot \operatorname{tg} \phi = 100 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \vartheta, \quad (5/0)$$

$$l_\phi = 100 \cdot \operatorname{tg} \phi (\%), \quad (5/1)$$

$$l_\varphi = 100 \cdot \operatorname{tg} \varphi (\%), \quad (5/2)$$

$$\underline{l_\phi = l_\varphi \cdot \cos \vartheta}. \quad (5/3)$$

Más szóval: ez az $l_\phi = f(l_\varphi, \vartheta)$ függvénykapcsolat.

Hasonló összefüggésre jutottunk **) - ban, csak más jelölésekkel.

M2. Kíváncsiak vagyunk, hogy mekkora κ szöghöz tartozik az l_ϕ százalékos lejtés. Ehhez az 1. ábráról:

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{\overline{PT}}{\overline{CT}} = \frac{t \cdot \operatorname{tg} \vartheta}{\frac{t}{\cos \varphi}} = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \vartheta \rightarrow \underline{\kappa(\varphi, \vartheta) = \operatorname{arctg}(\cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \vartheta)}. \quad (6)$$

Ezzel a $\lambda = \kappa / \vartheta$ szög - arány:

$$0 < \lambda = \frac{\operatorname{arctg}(\cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \vartheta)}{\vartheta} < 1. \quad (7)$$

M3. Most (1) és (6) - tal:

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \vartheta = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \kappa}{\cos \varphi}\right)^2}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \kappa}{\cos^2 \varphi}}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \kappa \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}} \rightarrow$$

$$100 \cdot \operatorname{tg} \phi (\%) = \frac{100 \cdot \operatorname{tg} \varphi (\%)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \kappa \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}} \rightarrow \underline{l_\phi = \frac{l_\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \kappa \cdot \left[1 + \left(\frac{l_\varphi}{100}\right)^2\right]}}}. \quad (8)$$

Más szóval: ez az $l_\phi = F(l_\varphi, \kappa)$ függvénykapcsolat.

SZÁMPÉLDÁK

1.) Határozzuk meg, hogy hány százalékra csökken az **50 %** - os lejtésű sík azon egyeneseinek a lejtése, amely az esésvonallal **45°** - os szöget zár be! Most (8) - cal:

$$l_\phi = \frac{l_\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \kappa \cdot \left[1 + \left(\frac{l_\varphi}{100}\right)^2\right]}} \rightarrow l_\phi = \frac{50 (\%)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 45 \cdot \left[1 + \left(\frac{50}{100}\right)^2\right]}} = \frac{50 (\%)}{\sqrt{1 + 1 \cdot \left[1 + \left(\frac{50}{100}\right)^2\right]}} = \frac{50 (\%)}{\sqrt{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \rightarrow$$

$$l_{\phi} = \frac{50 (\%)}{\sqrt{2 + \frac{1}{4}}} = \frac{50 (\%)}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{2}{3} \cdot 50 (\%) = \frac{100}{3} (\%) = 33,33 (\%) , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{l_{\phi} = 33,33 (\%)}} . \quad (a)$$

Tehát az **50 %** - os lejtésű sík esésvonalával **45°** - os szöget bezáró egyenes lejtése **33,33 %** - ra csökken.

2.) Mekkora a hajlása az **50 %** - os lejtésű esésvonalnak? Most (5 / 2) - vel:

$$l_{\varphi} = 100 \cdot \operatorname{tg} \varphi (\%) \rightarrow 50 (\%) = 100 \cdot \operatorname{tg} \varphi (\%) \rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \right) \approx$$

$$\approx 26,6^{\circ} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\varphi = 26,6^{\circ}}} . \quad (b)$$

Tehát az **50 %** - os lejtésű esésvonalnak a hajlása mintegy **26,6°**.

3.) Hány fokos azon egyenes hajlása, amelynek lejtése **33,33 %** ? Most (5 / 1) - gyel:

$$l_{\phi} = 100 \cdot \operatorname{tg} \phi (\%) \rightarrow 33,33 (\%) = 100 \cdot \operatorname{tg} \phi \rightarrow \operatorname{tg} \phi = \frac{33,33}{100} \rightarrow$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{33,33}{100} \right) \approx 18,4^{\circ} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\phi = 18,4^{\circ}}} . \quad (c)$$

Tehát a **33,33 %** lejtésű egyenes hajlása mintegy **18,4°**.

4.) Mekkora hegyesszöget zárnak be az **50 %** - os és a **33,33 %** - os lejtésű egyenesek függőleges vetítősíkjai egymással? Most (5 / 3) - mal:

$$l_{\phi} = l_{\varphi} \cdot \cos \vartheta \rightarrow \frac{l_{\phi}}{l_{\varphi}} = \cos \vartheta \rightarrow \vartheta = \arccos \left(\frac{l_{\phi}}{l_{\varphi}} \right) = \arccos \left(\frac{33,33 \%}{50 \%} \right) = \arccos \left(\frac{0,3333}{0,50} \right) ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{\vartheta = 48,2^{\circ}}} . \quad (d)$$

Tehát az **50 %** - os és a **33,33 %** - os lejtésű egyenesek függőleges vetítősíkjai mintegy **48,2°** - os szöget zárnak be egymással.

.....

M4. A (d) - hez vezető úton is felhasználtuk azt a tényt, hogy:

„A százalék a századrészek száma”. (Így tanultuk, innen az idézet.)

M5. Bár a cím egy feladatot említ, itt több is lett belőle. Ilyen a dolgok természete. Egy kicsit gyakoroltuk a százalékos lejtéssel való bánást is.

M6. A (2) reláció betartása jelenti a fél tető belsejében maradást. Az egyik határ az „oromfal”, a másik határ a szimmetriasík. (Azért tettük idézőjelbe az oromfalat, mert lehet, hogy semmi anyagi fal nincs ott megépítve.)

M7. A **D** és **O** csúcsonál jelölt ϑ_0 szögek egy fedélidom - közepelési szabály (ld. 1. rész!), valamint merőleges szárú szögek miatt egyenlők egymással és $\varepsilon/2$ - vel.

M8. Az **O** csúcsonál lévő ϑ_0 szögre nem tettük ki az 1. ábrán a negatív előjelet, de a (3) képlethez vezető úton mégis alkalmaztuk azt. Láttuk, hogy ez itt nem okozott gondot, a $\cos(-x) = \cos(x)$ „visszavezető formula” miatt – ld.: [1]! Ez azt is jelenti, hogy a szimmetriasíktól $\pm \vartheta$ szögtávolságra $\operatorname{tg} \phi$ értéke ugyanaz.

Ajánlott olvasmányok:

*) [Egy feladat a teto szogeirrol.pdf](#)

**) [Rampa egyenesei lejteseirrol.pdf](#)

Forrás:

[1] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnök tanár

Sződliget, 2025. 03. 04.

Továbbiak: www.galgoczi.net